数理解析研究所講究録 1469 巻 2006 年 65-78

On pseudospaces

東海大学理学部数学科　米田郁生 (Ikuo Yoneda)
Department of Mathematics, Tokai University

1 Introduction

擬空間が定義される*構造の例は、安定な体と Baudisch-Pillay が構成した trivial な forking を持つものが知られていた。ここでは Evans の結果 : 2 種類の無向グラフ構造による「non-trivial な forking を持ち擬空間が定義される安定な構造の構成」について解説する。目標の構造は、trivial な forking を持つ安定な 2 種類の有向グラフ構造の reduct †(向きを取ったもの) で得られ、無限群が翻訳されない事が分る。本講究録の構成は次の通り。
2 節 : forking が Trivial で One-based な有向グラフの解説。3 節 : 2 節の無向グラフの foriking は non-trivial で CM-自明になる事の解説。4 節 : disjoint な 2 種類の辺を持つ Trivial かつ One-based な有向グラフの解説。5 節 : 4 節の辺の向きを取り 2 種類の辺の合成した合計 3 種類の辺がある無向グラフは non-trivial で CM-非自明 (2-ample) になる事の解説。6 節 : 4 節に有向ループなしの条件を加えると 5 節のグラフが擬空間を定義する事の解説。

2 Reduction が non-trivial,CM-trivial となる trivial,one-based な理論 T'

- 言語は $R'(x,y)$ のみで、有向グラフの辺を表す。
- $\mathbf{K}'$ を $\forall x \exists^{\leq 2} y R'(x,y)$ を満たす有向グラフのクラスとする。

*Definition 6.2.2 参照

†Reduction : T' を L'-theory に対し T' の Morleyized $\tilde{L}'$-theory $\tilde{T}'$ を考える。ここで $\tilde{L}' = L' \cup \{R_\varphi(\bar{x}) : \varphi \in L'\}$ で $\tilde{T}' = T' \cup \{\forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\varphi(\bar{x})) : \varphi(\bar{x}) \in L\}$.　L'-論理式からなる或る集合 L に対し「T' の L への Reduct」とは言語 $\tilde{L}'$ の部分言語 $\{R_\varphi(\bar{x}) : \varphi \in L\}$ に $\tilde{T}'$ を制限した理論の事。

$\mathbf{K}'$ は部分構造に閉じている。

- **閉包**
$A \subseteq B \in \mathbf{K}'$ に対し、$\mathrm{cl}'^0_B(A) = A, \mathrm{cl}'^{i+1}_B(A) = \{y \in B : R'(x,y), x \in \mathrm{cl}'^i_B(A)\}$ とし、閉包を次のように与える。
$$\mathrm{cl}'_B(A) = \bigcup_{i<\omega} \mathrm{cl}'^i_B(A)$$
ここで $\mathrm{cl}'_B(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}'_B(\{a\})$ が成立。cl' は trivial な閉包になっている。
$\mathbf{K}'$ の与え方 $(\forall x \exists^{\leq 2} y R'(x,y))$ より
$$\mathrm{cl}'_B(A) \subseteq \mathrm{acl}_B(A)$$
も分かる。

- **K に部分順序 $\leq'$ を与える**
部分構造 $A \subseteq G$ が「$R'(a,b), a \in A, b \in G$ ならば $b \in A$」を満たす時 (即ち $A = \mathrm{cl}_G(A)$ の時)
$$A \leq' G$$
と書く。

- **自由融合**
$A, B, C \in \mathbf{K}', A = B \cap C$ に対し、自由融合 $B \amalg_A C$ を $R'^{B \amalg_A C} = R'^B R'^C$ と BC 上に辺を与えたグラフとする。このとき $B \amalg_A C \in \mathbf{K}'$ より、$\mathbf{K}'$ の $\leq'$ に関する融合性と
$$\mathrm{cl}'_B(A) = \mathrm{acl}_B(A)$$
がわかる。

- **Reduct を取る前の理論**
$T'_1 = \{\forall \bar{x} \exists \bar{y} (\mathrm{Diag}_A(\bar{x}) \rightarrow \mathrm{Diag}_B(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \forall z (R'(y,z) \wedge y \in \bar{y} \rightarrow z \in \bar{x}\bar{y})) : A \leq' B \in \mathbf{K}'\ A, B$ は有限$\} \cup \{\forall \bar{x} \neg \mathrm{Diag}_A(\bar{x}) : A \notin \mathbf{K}'\}$ と定める。

- $R'(y,z) \wedge y \in \bar{y} \rightarrow z \in \bar{x}\bar{y}$ が主張することは
$$\mathrm{cl}'(\bar{x}\bar{y}) = \mathrm{cl}'(\bar{x})\bar{y}$$
$\supseteq$ は明らか。$z \in \mathrm{cl}'(\bar{y})$ ならば $z \in \mathrm{cl}'(\bar{x})\bar{y}$ を言えばよい。$z \in \mathrm{cl}'^1(\bar{y})$ のとき $z \in \bar{x}\bar{y}$ で OK。$z \in \mathrm{cl}'^2(\bar{y})$ のとき $R'(z,z')$ かつ $z' \in \mathrm{cl}'^1(\bar{y}) \subseteq \bar{x}\bar{y}$ となる z' があり、$z \in \mathrm{cl}'(\bar{x})$ または $z \in \bar{x}\bar{y}$ が分かる。以下同様。

- $M \models T_1'$ iff 「$A, B \in \mathbf{K}'$ は有限で $A \leq' B$ かつ $A \subset M$ ならば
$$\mathrm{cl}'_M(B') = \mathrm{cl}'_M(A) \amalg_A B'$$
を満たす A 上の B のコピー B' が M の中に存在する」が成立。このような性質を持つ構造を **semigeneric 構造**と呼ぶ。

- T_1' は無矛盾：$\mathbf{K}_0'$ を $\mathbf{K}'$ の有限有向グラフに限定したクラスとする。自由融合に閉じているので、有限閉包を持つ $(\mathbf{K}_0', \leq')$-generic M が存在する。$\mathrm{cl}'_M(A)$ 上、$\mathrm{cl}'_M(A) \amalg_A B$ を M に closed に埋め込めば、$M \models T_1'$ は分かる。

- $M \models T_1'$ が ω-saturated のとき $A \subset_\omega M, \mathrm{cl}'_M(A) \leq' B \in \mathbf{K}'$ で $B - \mathrm{cl}'_M(A)$ が可算のとき、compactness より B の $\mathrm{cl}'_M(A)$ 上のコピー B' で $B' \leq' M$ となるものがとれる。
Proof. $C = B - \mathrm{cl}'_M(A)$ とする。$C, \mathrm{cl}'_M(A)$ 共に可算より、, $A = A_0, \bigcup_{i<\omega} A_i = \mathrm{cl}'_M(A), C = \bigcup_{j<\omega} C_j$ となる有限グラフの上昇列 $(A_i)_{i<\omega}, (C_j)_{j<\omega}$ がとれる。$\mathrm{cl}'_M(A) \leq' \mathrm{cl}'_M(A)C$ より $A_i \leq' A_iC_j$.
$$\Sigma(\bar{y}) = \{\forall \bar{x}_i(\mathrm{Diag}_{A_i}(\bar{x}_i) \to \mathrm{Diag}_{A_iC_j}(\bar{x}_i\bar{y}_j) \wedge \mathrm{cl}'(\bar{x}\bar{y}_j) = \mathrm{cl}'(\bar{x})\bar{y}_j) : i, j < \omega\}$$
は M で有限充足より M で解を持つ。

- T_1' の ω-saturated models 間で有限グラフの閉包上 Back and forth argument ができ、T_1' の完全性が分かる。
特に、$M, N \models T_1', \bar{a} \in M, \bar{b} \in N$ に対し $\mathrm{tp}_M(\bar{a}) = \mathrm{tp}_N(\bar{b})$ iff $\mathrm{cl}'_M(\bar{a}) \simeq \mathrm{cl}'_N(\bar{b})(\bar{a} \mapsto \bar{b})$.

- T_1' は安定：$\mathcal{M} \models T_1', A \leq' \mathcal{M}, \bar{a} \in \mathcal{M}$ ならば $\mathrm{qftp}(\mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}A)/A) \vdash \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$.
$\mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}A) = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \amalg_{\mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \cap A} A$ で有限グラフの閉包は可算より、A 上のタイプの個数は $max\{2^\omega, |A|^\omega\}$ 以下。

- $\mathcal{M} \models T_1', A \leq' \mathcal{M}, \bar{a} \in \mathcal{M}$ ならば $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ does not fork over $\mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \cap A$.
特に One-based。$\mathrm{Cb}(\bar{a}/A) \subseteq \mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$
Proof. $B = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \cap A$ とおく。$(A_i)_{i<\omega}$ を $A_0 = A$ の B-indiscernible sequence とする。$C = \bigcup_{i<\omega} A_i$ とおき $\mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a})$ と C の B 上の自由融合を D とする。$B \leq' \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}), B \leq' C$ より $B \leq' D$. $\mathcal{M}$ の saturation から D を B 上動かして $D = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}_1) \amalg_B C \leq \mathcal{M}$ としてよい？$\mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \simeq_B \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}_1)$ より $\mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}_1A) = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \amalg_B A \simeq \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}_1) \amalg_B A_i = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(\bar{a}_1A_i)$. よって $\mathrm{tp}(\bar{a}_1A_i) = \mathrm{tp}(\bar{a}A)$.

- $\mathcal{M} \models T_1', A, B, C \subset \mathcal{M}$ に対し

$$A \underset{B}{\perp} C \Leftrightarrow \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(AB) \cap \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(BC) = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}}(B) \Leftrightarrow \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(AB) \cap \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(BC) = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(B).$$

- T_1' は trivial。
「$\bar{a} \perp \bar{b}, \bar{a} \perp \bar{c} \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}\bar{c}$」は $\mathrm{cl}'(\bar{b}\bar{c}) = \mathrm{cl}'(\bar{b})\mathrm{cl}'(\bar{c})$ より分かる。

3 T_1' の reduct(向き無し)

$R(x,y) \equiv R'(x,y) \vee R'(y,x)$ と定め、無向の辺 $R(x,y)$ を考える。

- $\mathbf{K}$ を $\mathbf{K}'$ の部分言語 $\{R(x,y)\}$ への reduct、即ち $\mathbf{K}'$ に属する有向グラフの向きを除いた無向グラフの集まりとする。
$A \in \mathbf{K} \Leftrightarrow$「$A$ の辺の適当な向き付けで $\mathbf{K}'$ に属する有向グラフに出来る」
$\mathbf{K}$ は部分構造に閉じている。($\mathbf{K}'$ が部分構造に閉じているので)

- $A \in \mathbf{K}$ に対し適当な向き付けで $\mathbf{K}'$ の有向グラフとなった $\{R'(x,y)\}$-構造を A' と書くことにする。(A に対し unique に決まるわけではない)

- B の向き付けは、$V(B) \times R^B$ 上の関数 $w(*,*) = 0,1$ で特徴付けられる。

$$w(a,ab) = 1 \Leftrightarrow B' \models R'(a,b).$$

このとき $B' = (B,w)$ と書く。

- **$\mathbf{K}'$ の $w(*,*)$ による特徴付け**
$B' \in \mathbf{K}' \Leftrightarrow$「各頂点 $a \in V(B)$ に対し $\Sigma_{a \in e \in R^B} w(a,e) \le 2$」
$A' \le' B' \Leftrightarrow$「$B' = (B,w)$ に対し $a \in V(A), w(a,e) = 1 \Rightarrow e \in R^A$」

Lemma 3.1 $\delta(A) = 2|A| - |R^A|$ で与えられる $\le$ に対し $A \subseteq B$ が有限のとき $\emptyset \le A \le B \Leftrightarrow$「$A' \le B' \in \mathbf{K}'$ と向き付けできる」。特に $\delta(A) = 2|A| - |R^A|$ で与えられる $\overline{\mathbf{K}_0}$ と $\mathbf{K}$ が一致。

Proof. ($\Leftarrow$): $B' = (B,w), A' \le' B' \in K'$ とする。$A \subseteq B_0 \subseteq B$ ならば $A' \le' B_0'$ より $\delta(B) \ge \delta(A)$、即ち $2|B - A| \ge |R^B - R^A|$ を示せばよい。$B' \in \mathbf{K}'$ より $\Sigma\{w(x,e) : x \in B - A, x \in e \in R^B - R^A\} \le 2|B - A|$。一方、$A' \le' B'$ より $x \in e \in R^B - R^A$ ならば「$w(x,e) > 0 \Leftrightarrow w(x,e) = 1, x \in B - A$」より

$|R^B - R^A| = \Sigma\{w(x,e) : x \in B - A, x \in e \in R^B - R^A\} \leq 2|B-A|$。
($\Rightarrow$): つぎのような有向 bipatite graph G を考える。$V_1 = R^B - R^A, V_2 = B - A$ とおく。$G \subseteq V_1 \cup \{t\} \times V_2 \cup \{s\}$ で G の辺は向き付きで

$$E(G) = \{se : e \in V_1\} \cup \{xt : x \in V_2\} \cup \{ex : x \in e, x \in V_2, e \in V_1\}$$

と与える。

s を G の source、t を G の sink とし、G の flow,capacity,cut などを考え、グラフ理論の max-flow=min-cut 定理を使う。capacity は s,t 以外の頂点に与える正実数で、ここでは V_1 の各頂点に 1, V_2 の各頂点に 2 を与える。

$f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が G の flow であるとは各頂点 $x \neq s,t$ に対し

$$\Sigma_{xy \in E(G)} f(xy) = \Sigma_{yx \in E(G)} f(yx) \leq c(x)$$

が成立するときで、

$$\Sigma_{sy \in E(G)} f(sy) - \Sigma_{ys \in E(G)} f(ys) = \Sigma_{xt \in E(G)} f(xt) = \Sigma_{tx \in E(G)} f(tx)$$

が成立し、この値を $v(f)$ と書き flow value と呼ぶ。
$S \subseteq V(G) - \{s,t\}$ が cut であるとは $G - S$ のすべての flow に対し $v_{G-S}(f) = 0$ が成立するとき。
Max-flow=min-cut Theorem: $\max_f v(f) = \min_{S:cut} \Sigma_{x \in S} c(x)$
Integral Theorem: capacity が整数のとき max-flow を与える flow は整数の関数になる。

Max-flow, min-cut theorem による max-flow を f、minimal cut を S とし、$S_i = S \cap V_i (i = 1,2)$ とおくと $|S_1| + 2|S_2| = v(f)$ が成立する。一方、$v(f) \leq \Sigma_{y \in V_1} f(sy) \leq |V_1|$ が成立。

Claim $v(f) = |V_1|$

$v(f) < |V_1|$ とする。$|S_1| + 2|S_2| = v(f) < |V_1|$ より

$$2|S_2| < |R^B - R^A| - |S_1|.$$

S は cut より $V_1 - S$ と $V_2 - S$ の間には辺がない。($x \in V_2 - S, e \in V_1 = S$ で ex が辺ならば、$G - S$ 上の flow g が $1 = g(se) = g(ex) = g(xt)$ で他はすべて

0 で与えられ $v_{G-S}(g) = 1$ となる。) よって $e \in V_1 - S, x \in V_2$ で $ex \in E(G)$ ならば $x \in S_2$。X を辺の集合 $V_1 - S$ に表れる頂点とすれば $X - A \subseteq S_2$. よって

$$|X| - |X \cap A| \leq |S_2|.$$

従って、$2(|X| - |X \cap A|) \leq 2|S_2| < |R^B - R^A| - |S_1| = |V_1 - S| \leq |R^X - R^A|$. よって

$$\delta(X/X \cap A) < 0.$$

$A \leq B$ に矛盾。**Claim 証明終わり**

$|V_1| = v(f) = \Sigma\{f(se) : e \in V_1\}$ より $1 = f(se) = f(ex) + f(ex'), e = xx'$.
$V(B) \times R^B$ 上に求める $w(*,*) = 0, 1$ を以下のように定める。

$$w(x,e) = \begin{cases} f(ex) & (x \in V_2 = B - A, e \in V_1 = R^B - R^A, x \in e) \\ 0 & (e \in V_1, x \in e \cap A) \\ v(x,e) & (x \in A, e \in R^A) \end{cases}$$

ここで $v(x,e)$ は同じ議論を $\emptyset \leq A$ に対し行い max-flow で得る関数。
$w(*,*)$ が向き付けを与える事は OK。
$x \in B$ に対し、$\Sigma\{w(x,e) : x \in e\} \leq 2$ である事。
$x \in V_2 = B - A$ の場合を示せばよい。$\Sigma\{w(x,e) : x \in e\} = \Sigma\{f(ex) : x \in e\} \leq c(x) = 2$. □

Theorem 3.2 cl′ の *reduct* が *δ-rank* が与える cl となるので T_1' の *reduct* の T_1 は $(\mathbf{K}_0, \leq)$-*semigeneric* 構造の公理になる。*Baldwin-Shelah* の結果から、T_1 は完全で $(\mathbf{K}_0, \leq)$-*generic* も *semigeneric* より $(\mathbf{K}_0, \leq)$-*generic* の理論になる。この T_1 は *CM*-自明で *trivial* でも *one-based* でもない。

Proof. T_1 の big model $\mathcal{M}$ において

$$a \underset{b}{\perp} c \Leftrightarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(ab)\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(bc) = \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(ab) \amalg_{\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(b)} \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(bc) \leq \mathcal{M}$$

が成立する。

Trivial でない事: a_1, a_2, a_3, b が頂点で、$R(a_i, b)$ となる無向きグラフを A とする。$A \in \mathbf{K}_0$ より、T の big model $\mathcal{M}$ で $A \leq \mathcal{M}$ としてよい。$a_i, a_i a_j \leq A \leq \mathcal{M}$ より $a_i \perp a_j$ が成立。もし $a_1 \perp a_2 a_3$ ならば $a_1 a_2 a_3 = \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(a_1)\mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(a_2 a_3) \leq \mathcal{M}$ で $\delta(b/a_1 a_2 a_3) = -1$ と矛盾する。

One-based でない事：頂点が a, b, c で $R(a, c)$ のグラフ B を考える。$B \in \mathbf{K}_0$ より $B \leq \mathcal{M}$ としてよい。$\delta(a/bc) = 1 = \delta(c/ab)$ より $bc, ab \leq \mathcal{M}$. もし One-based ならば $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(ab) \cap \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(bc) = \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(ab) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(bc) = b$ より $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_b c$ が成立し、$B = ab \amalg_b bc$ となり矛盾。

4 Reductionがnon-trivial,2-ampleとなるtrivial, one-basedな理論T_2'

- 言語は $R_1'(x, y), R_2'(x, y)$ で、2つの有向グラフの辺を表す。
- $\mathcal{C}_0'$ を辺 R_1', R_2' は disjoint(即ち $\forall x \forall y (R_i'(x, y) \to \neg R_j'(x, y))(i \neq j)$) かつ $\forall x \exists^{\leq 2} y R_i'(x, y)(i = 1, 2)$ を満たす有向グラフのクラスとする。
  $\mathcal{C}_0'$ は部分構造に閉じている。
- **閉包**
  $A \subseteq B \in \mathcal{C}_0'$ に対し、$\mathrm{cl}_B'^0(A) = A, \mathrm{cl}_B'^{i+1}(A) = \{y \in B : R_i'(x, y), i = 1, 2, x \in \mathrm{cl}_B'^i(A)\}$ とし、閉包を次のように与える。
  $$\mathrm{cl}_B'(A) = \bigcup_{i<\omega} \mathrm{cl}_B'^i(A)$$
  ここで $\mathrm{cl}_B'(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}_B'(\{a\})$ が成立。cl' は trivial な閉包になっている。
  $\mathcal{C}'$ の与え方 $(\forall x \exists^{\leq 2} y R_i'(x, y)(i = 1, 2))$ より
  $$\mathrm{cl}_B'(A) \subseteq \mathrm{acl}_B(A)$$
  も分かる。
- $A \subseteq B \in \mathcal{C}_0'$ に対し「$B \models R_i'(a, b), a \in A$ ならば $b \in A$」が成立するとき
  $$A \leq' B$$
  と定める。
- $R_i(x, y) \equiv R_i'(x, y) \vee R_i'(y, x)$ と辺 R_i' の向きを除いた辺を R_i と定める。
- $A \in \mathcal{C}_0'$ とする。A での a_0 から a_2 への $(1, 2)$-path とは
  $A \models R_1(a_0, a_1) \wedge R_2(a_1, a_2)$ となる列 (a_0, a_1, a_2).

- Nice $(1,2)$-path であるとは、
$A \models (R_1'(a_0,a_1) \wedge R_2'(a_2,a_1)) \vee (R_1'(a_0,a_1) \wedge R_2'(a_1,a_2)) \vee (R_1'(a_1,a_0) \wedge R_2'(a_2,a_1))$ であるとき。

- $A \in \mathcal{C}_0'$ に a から b への $(1,2)$-path があるとき $A \models P^{1,2}(a,b)$ と書く。

- $A \in \mathcal{C}_0'$ に対し「A に a_0 から a_2 の $(1,2)$-path があるならば A に a_0 から a_2 の $(1,2)$-path がある」を満たす $\mathcal{C}'$ の部分クラスを $\mathcal{C}'$ と書く。
部分構造に閉じてない: 頂点 a,b,c,d で辺が $R_1'(b,a), R_1'(a,d), R_2'(b,c), R_2'(c,d)$ とする。このとき $abcd \in \mathcal{C}', abc \notin \mathcal{C}'$

Lemma 4.1 *1.* $A \leq' B \in \mathcal{C}', a,b \in A$ のとき

$$A \models P^{1,2}(a,b) \Leftrightarrow B \models P^{1,2}(a,b).$$

2. $B, C \in \mathcal{C}', A = B \cap C \leq' C$ ならば $B \leq' D := B \amalg_A C \in \mathcal{C}'$.

Proof. 1: $B \models P^{1,2}(a,b)$ ならば $B \models P^{1,2}(a,b)$ を示す。$B \in \mathcal{C}'$ より $B \models R_1'(a,c) \wedge R_2'(b,c)$ となる $c \in B$ が存在する場合 (他も同様) を考える。ここで $A \leq' B$ より A から $B - A$ へ向きの辺はない。従って $c \in A$ が分かり OK.
2: $B \leq' D$ は明らか。$D \models R_1'(b,a) \wedge R_2'(b,c)$ とする。$b \in B$ ならば $a, c \in B$ より B の中で a から c への Nice path が存在するので OK。
$b \in C - A$ とする。D の定め方より $a, c \in C$ で $C \in \mathcal{C}'$ より OK. □

Proposition 4.2 $T_2' = \{\forall \bar{x} \exists \bar{y} (\mathrm{Diag}_A(\bar{x}) \to \mathrm{Diag}_B(\bar{x},\bar{y}) \wedge \forall z (R_i''(y,z) \wedge y \in \bar{y} \to z \in \bar{x}\bar{y})) : i = 1,2, A \leq' B \in \mathcal{C}'\ A, B$ は有限 $\} \cup \{\forall \bar{x} \neg \mathrm{Diag}_A(\bar{x}) : A \notin \mathcal{C}_0'\} \cup \{\forall x, y (P^{1,2}(x,y) \to \exists z (R_1'(x,z) \wedge R_2'(y,z)))\}$ と定める。*Lemma* ??より T_2' は無矛盾で、前と同様の議論で完全性、安定性、*Triviality*、*One-basedness* が分かる

5 T_2' の Reduction T_2 は 2-ample

- L'- 構造のクラス $\mathcal{C}'$ の部分言語 $R_i(x,y) (i = 1,2), P^{1,2}(x,y)$ への reduct のクラスを $\mathcal{C}$ とする。

- $\mathcal{C}$ は部分構造に閉じていない。$abc \models R_1'(a,b) \wedge R_2'(c,b)$ とする。このとき $B' := abc \in \mathcal{C}'$ で $B \models P^{1,2}(a,c)$ だが $A := ac \models P^{1,2}(a,c)$ は成立しない。従って A は B の部分構造でない。

- $A, B \in \mathcal{C}, A \subseteq B$ に対し $A', B' \in \mathcal{C}', A' \leq B'$ となる向き付けができるとき
$$A \leq B$$
と定める。

- **閉包が定義できない**
$A, B \leq C \in \mathcal{C}$ で $A \cap B \not\leq C$ となる例: C を頂点が a, b, c, d、辺は $R_1(a,b), R_1(a,c), R_2(b,d), R_2(c,d)$ のみとする。
C を $R_1'(a,b), R_1'(c,a), R_2'(d,b), R_2'(c,d)$ と向き付けたのを C' とすると $C' \in \mathcal{C}'$ で $abd \leq' C'$ が成立。
C を $R_1'(b,a), R_1'(a,c), R_2'(b,d), R_2'(d,c)$ と向き付けたのを C'' とすると $C'' \in \mathcal{C}'$ で $acd \leq' C''$ が成立。
$abd, acd \leq C \in \mathcal{C}$ だが $abd \cap acd = ac$ は C の部分構造にならない。
$(C \models P^{1,2}(a,c)$ だが $ac \not\models P^{1,2}(a,c))$

- **自由融合の定義**
$B, C \in \mathcal{C}, A = B \cap C$ に対し
$B \amalg_A C$ を以下の条件を満たすグラフとする。
頂点は BC、$B - A$ と $C - A$ を跨ぐ R_i の辺はなく
$P^{1,2}$ については $b \in B - A, c \in C - A$ に対し
$B \amalg_A C \models P^{1,2}(b,c) \Leftrightarrow$ 「$B \models R_1(b,a)$ かつ $C \models R_2(c,a)$ となる $a \in A$ がある」
$(B \amalg_A C \models P^{1,2}(c,b)$ についても同様$)$

Lemma 5.1 $A, B, C \in \mathcal{C}$ とする。

1. $A' \leq' B' \in \mathcal{C}'$ で $A'' \in \mathcal{C}$ を A' とは違う A を向き付けた有向グラフ、B'' を B' の A' の部分を A'' にした有向グラフとする。このとき $B'' \in \mathcal{C}'$.
2. $A \leq B, B \leq C \in \mathcal{C}$ ならば $A \leq C$.
3. $A = B \cap C \in \mathcal{C}, A \leq B, C \in \mathcal{C}$ とする。このとき $B, C \leq B \amalg_A C \in \mathcal{C}$.

Proof. 1: $B'' \models P^{1,2}(a,c)$ とする。$a, c \in A$ のときは $A'' \in \mathcal{C}'$ より a から c への Nice path が A'' 内部にあるので OK.
$a \in B - A, c \in A$ とする。$B \models R_1(a,b) \wedge R_2(b,c)$ となる b が A に属すれば、$A'' \leq' B''$ より $B'' \models R_1'(a,b)$. よって abc は Nice path. $b \in B - A$ ならば abc の向きは B' と同じより B' の向きで Nice path adc がある。$d \in B - A$ として

よい。このとき adc の向きは B'' でも同じ。
$a,c \in B-A$ とする。$B \models R_1(a,b) \wedge R_2(b,c)$ となる b が A に属すれば、$A'' \leq' B''$ より abc が B'' での Nice path が分る。$b \in B-A$ のとき $abc \subset B-A$. abc は B' の向きで Nice path としてよい。$abc \subset B-A$ より B'' の向きでも abc は Nice path.
2: 1 より分る。
3: $A', B' \in \mathcal{C}', A' \leq' B', A'', C'' \in \mathcal{C}', A'' \leq C''$ とする。C'' の内部の A'' の向きを A' にかえた C の向き付けを C' とすると 1 より $A' \leq C' \in \mathcal{C}'$ が成立し、$A' \leq' B', C' \leq' B' \amalg'_A C' \in \mathcal{C}'_0$ が成立。
$B \amalg_A C \in \mathcal{C}$ である事 : $B \amalg_A C \models P^{1,2}(b,c)$ で $b \in B-A, c \in C-A$ のときは OK。それ以外の場合は $b,c \in B$ または $b,c \in C$ より OK。 □

T'_2 の $R_i(i=1,2), P^{1,2}$ への reduct を T_2 とする。$\mathcal{C}$ における閉包がないので T_2 を具体的に公理化できないが T'_2 が完全かつ安定より T_2 も完全かつ安定。

以下、$\mathcal{M}'$ を T'_2 の big model とし、Reduct の $\mathcal{M}$ は T_2 の big model になるが、$\mathcal{M}$ は閉グラフ上同質性を持つ。

Proposition 5.2 $A_1, A_2 \leq \mathcal{M}$ で $\sigma : A_1 \to A_2$ が同型写像ならば $A_1 \equiv A_2$ が成立する。

Proof. Claim を 2 つ用意する。
Claim 1: $A' \leq \mathcal{M}'$ とする。A'' の reduct が A' と一致するとき $\mathcal{M}'$ の A' の向きだけを A'' に変えたものを $\mathcal{M}''$ とする。このとき $\mathcal{M}''$ も T'_2 の big model.
Claim 1 の証明: $\mathcal{M}'' \in \mathcal{C}'$ は OK.
「$B'' \leq' \mathcal{M}'', B'' \leq' D'' \in \mathcal{C}'$ ならば $D'' \simeq_B D''_1 \leq' \mathcal{M}''$」を示せば $\mathcal{M}'$ と $\mathcal{M}''$ の間で閉包上の back and fourth で $\mathcal{M}'' \models T'_2$ が分り、タイプは閉包の型で規定されるので saturation も分る。
$A'', B'' \leq \mathcal{M}''$ で cl' は Trivial だから $B'' \leq' B''_1 := A''B'' = A'' \amalg_{A'' \cap B''} B'' \leq' \mathcal{M}''$. そして $D'', B''_1 \leq' D''_1 = D'' \amalg_{B''} B''_1 \in \mathcal{C}'$ が成立する。これらを A'' の部分の向きを A' に戻したものをそれぞれ $B', D', B'_1, D'_1 \in \mathcal{C}'$ とする。$B'_1 \leq' D'_1, B'_1 \leq' \mathcal{M}'$ より $\mathcal{M}'$ の saturation から D'_1 を B'_1 上動かし、$D'_1 \leq' \mathcal{M}$ としてよい。ここで $A' \not\subseteq D', B'$ より $B' \leq D', B'_2$ や特に $D' \leq D'_1$ は分らない。再び A' の部分を A'' に戻すと D''_1 は B''_1 上、$D''_1 \leq' \mathcal{M}''$ と埋め込まれ $D'' \leq D''_1$ より D'' は B'' 上 $D'' \leq' \mathcal{M}$ と埋め込まれている。
Claim 2 : $A \leq \mathcal{M} \Leftrightarrow$ 「$A'' \leq' \mathcal{M}''$ で $\mathcal{M}'' \models T'_2$ が big model となる $\mathcal{M}$ の向き付けがある」

Claim 2 の証明 : ($\Leftarrow$) は $\leq'$ の定義より明らか。
($\Rightarrow$): $\mathcal{M}' \models T_2'$ は saturated とする。$A \leq \mathcal{M}$ を保障する向き付けを $A'' \leq' \mathcal{M}''$ とする。ここで $\mathcal{M}''$ が saturated と限らない事が問題。$A_1 = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}'}(A''), A_2 = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}''}(A_1), \ldots, A_{2i+1} = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}''}(A_{2i}), A_{2i+2} = \mathrm{cl}'_{\mathcal{M}''}(A_{2i+1}), \ldots$ とし $B = \bigcup_{i<\omega} A_i$ とすると $B' \leq' \mathcal{M}', B'' \leq' \mathcal{M}''$ が成立する。$B' \leq' \mathcal{M}'$ より $\mathcal{M}$ の中の B' の向きを B'' にしたものを $\mathcal{M}_1''$ とすれば Claim 1 より $\mathcal{M}_1''$ は saturated. そして $A'' \leq' B''$ より $A'' \leq' \mathcal{M}_1''$.

命題の証明: Claim 2 より $A_1'' \leq \mathcal{M}'', A_2''' \leq' \mathcal{M}'''$ で $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ 共に saturated としてよい。$\mathcal{M}''$ の中の A_1'' の向き付けだけを A_2''' と同じにしたものを $\mathcal{M}''''$ とする。Claim 1 より $\mathcal{M}''''$ は saturated。ここで A_1'''' と A_2''' は向き付きで同型。よって T_2' の saturated models $\mathcal{M}'''', \mathcal{M}'''$ 間の back and forth より T_2' で $A_1'''' \equiv A_2'''$ が成立する。よって T_2 で $A_1 \equiv A_2$. □

Non-forking のための十分条件は次のように与えられる。

Proposition 5.3 $A, B \leq AB = A \amalg_{A\cap B} B \leq \mathcal{M}$ ならば $A \perp_{A\cap B} B$.

Proof. $C = A \cap B$ とおく。$(B_i : i < \omega) \subset \mathcal{M}$ を B_0 の C-indiscernible sequence とする。$B \leq \mathcal{M}$ より $B_i \leq \mathcal{M}$. $N_i \models T_2'$ を $B_i \leq \mathcal{M}$ を保障する $\mathcal{M}$ の向き付けとする。ここで $E_0^0 = \mathrm{cl}_{\mathcal{M}}(\bigcup_{i<\omega} B_i), E_1^0 = \mathrm{cl}'_{N_1}(E_0^0), \ldots E_{i+1}^0 = \mathrm{cl}'_{N_{i+1}}(E_i^0) \ldots E_0^1 = \bigcup_{i<\omega} E_0^i, \ldots, E_{j+1}^i = \mathrm{cl}'_{N_{j+1}}(E_j^i), \ldots, E_0^{i+1} = \mathrm{cl}'_{M'}(\bigcup_{j<\omega} E_j^i), E_1^{i+1} = \mathrm{cl}'_{N_1}((E_0^{i+1}), \ldots D = \bigcup_{i<\omega} E_0^i$ とおく。このとき $D \leq' \mathcal{M}'$. よって $B_i \leq D \leq \mathcal{M}$. $F := A_1 \amalg_C D, A \simeq_C A$ とおくと $C \leq F \in \mathcal{C}, C \leq \mathcal{M}$ より $F \leq \mathcal{M}$ としてよい。また $A_1, A \leq \mathcal{M}$ より $A_1 \equiv_C A$. ここで $A_1, B_i \leq A_1 B_i = A_1 \amalg_C B_i \leq \mathcal{M}$ が成立する。($C' \leq B_i' \leq D' \leq' F'$ とする。このとき $A_1', B' \leq A_1' B' \leq F'$.) よって $AB \equiv A_1 B$. □

Theorem 5.4 $\mathcal{M} \models R_1(a_0, a_1) \wedge R_2(a_1, a_2)$ とする。a_0, a_1, a_2 は以下のように *2-ample* の *witness* になる。

1. $a_2 \perp_{a_1} a_0$
2. $a_2 \not\perp a_0$
3. $\mathrm{acl}(a_0) \cap \mathrm{acl}(a_1) = \mathrm{acl}(\emptyset)$
4. $\mathrm{acl}(a_0 a_1) \cap \mathrm{acl}(a_0 a_2) = \mathrm{acl}(a_0)$

Proof. 1: $a_0a_1a_2 \models R'_1(a_0,a_1) \wedge R'_2(a_2,a_1)$ とすると $a_0a_1a_2 \in \mathcal{C}'$ より $a_0a_1a_2 \leq \mathcal{M}$ としてよい。命題 ??より分る。
2: $a_0 = c_0$ とし $c_0c_1c_2c_3c_4$ を discrete とすると $c_i \leq c_0c_1c_2c_3c_4 \leq \mathcal{M}$ としてよい。このとき $\{P^{1,2}(c_i,y) : 0 \leq i \leq 4\}$ は解を持たない。もし解 d を持ったとすると $c_i \leq \mathcal{M}$ より d, c_i 間の Nice path は d から c_i 向きになる。しかし d からのそのような有向 Path は 4 本まで。
3: $a_0a_1b \models R'_1(a_1,a_0) \wedge R'_1(b,a_0)$ とする。このとき $a_0a_1b \in \mathcal{C}$ より $a_1a_0, ba_0 \leq a_1ba_0 \leq \mathcal{M}$ より $a_1a_0 \equiv ba_0$. また別の a_0a_1b の向き付け $a_0a_1b \models R'_1(a_0,a_1) \wedge R'_1(a_0,b)$ を考えるとこの向き付けで $a_1b \leq a_1ba_0 \leq \mathcal{M}$ が成立。よって $a_1 \downarrow b$ が成立。$c \in \mathrm{acl}(a_0) \cap \mathrm{acl}(a_1)$ とすると $c \in \mathrm{acl}(a_0) \cap \mathrm{acl}(b)$. よって $c \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ が成立。
4: $a_0ba_2 \models R'_1(a_0,b) \wedge R'_2(a_2,b)$ とすると $a_1a_0a_2 \equiv ba_0a_2$ と $b \downarrow_{a_0} a_1$ が成立する。ここで $c \in \mathrm{acl}(a_0a_1) \cap \mathrm{acl}(a_0a_2)$ とすると $c \in \mathrm{acl}(a_0a_2)$ より $c \in \mathrm{acl}(a_0b)$. よって $c \in \mathrm{acl}(a_0)$. □

6 群を翻訳しない Non-trivial な擬空間

有向グラフの辺を表す言語 $R'_1(x,y), R'_2(x,y)$ で規定された $\mathcal{C}'_0$ の定義に次の条件を加える。

- $\mathcal{D}'_0 \subseteq \mathcal{C}'_0$ を $\mathcal{C}'$ に属する有向グラフで各 $i = 1,2$ に対し R'_i-有向サイクルが存在しないものの集まりとする。
- $\mathcal{D}_0$ を $\mathcal{D}'_0$ の $R_i (i = 1,2), P^{1,2}$ への Reduct とする。

Remark 6.1 $B \in \mathcal{D}_0 \Leftrightarrow$「$B$ の各有限部分構造内で辺が *2* 本以下の頂点が必ずある」

Proof. ($\Rightarrow$):$A \subset_\omega B$ とする。$B \in \mathcal{D}_0$ より適当な向き付けで A にも有向サイクルはない。A の各頂点が 3 本以上の辺をもつとき、$\mathcal{D}'_0$ の定義から各頂点は他の頂点から来る向きの辺を持つ。A の一つの頂点から辺の逆向きにたどる操作は有限回で終わり、A で有向サイクルが出来てしまう。
($\Leftarrow$):$B' \in \mathcal{D}'_0$ を示すには各 $B_0 \subset_\omega B$ が $B'_0 \in \mathcal{D}'_0$ を示せばよいので、B は有限としてよい。2 本以下しか辺を持たない B の頂点を b_0 とする。b_0 の辺の向きを $R'(b_0,*)$ とする。仮定から $B - \{b_0\}$ についても同様な頂点があり、その辺の向きは外向きにする。この操作で B の頂点が $b_0, b_1, \cdots b_n$ と並べられ B のすべての辺に向きが与えられる。その有向グラフを B' とすると $B' \models R'(b_i, b_j)$

ならば$i<j$より有向サイクルが無く$B' \in \mathcal{D}'_0$が分かる。 $\square$

- $\mathcal{D}'$を$\mathcal{C}'_0$から$\mathcal{C}'$を定めたとき同様、(1,2)-pathがあればNice pathもある$\mathcal{D}'_0$に属す有向グラフ
- $A \in \mathcal{D}'_0$に対し「Aにa_0からa_2の(1,2)-pathがあるならばAにa_0からa_2の(1,2)-pathがある」を満たす$\mathcal{D}'$の部分クラスを$\mathcal{D}'$と書く。
- $T'_{2,\mathcal{D}'} = \{\forall\bar{x}\exists\bar{y}(\mathrm{Diag}_A(\bar{x}) \to \mathrm{Diag}_B(\bar{x},\bar{y}) \wedge \forall z(R''_i(y,z) \wedge y \in \bar{y} \to z \in \bar{x}\bar{y})) : i = 1,2, A \leq' B \in \mathcal{D}'\ A, B$は有限$\} \cup \{\forall\bar{x}\neg\mathrm{Diag}_A(\bar{x}) : A \notin \mathcal{D}'_0\} \cup \{\forall x, y(P^{1,2}(x,y) \to \exists z(R'_1(x,z) \wedge R'_2(y,z)))\}$と定める。$T'_{2,\mathcal{D}'}$は無矛盾で完全性、安定性、Triviality、One-basednessが分かる
- $T_{2,\mathcal{D}}$を$T'_{2,\mathcal{D}'}$のReductはnon-trivialで2-ample. $T_{2,\mathcal{D}}$はTrivialな理論のReductより無限群は翻訳されない。

Definition 6.2 1. 完全な理論Tが擬平面を定義するとは以下を満たす完全タイプ$r(x,y)$が存在するとき

(a) $ab \models r(x,y)$ならば$a \notin \mathrm{acl}(b), a \notin \mathrm{acl}(b)$

(b) $a \neq a'$ならば$r(a,y) \cup r(a',y)$は有限個の解だけ。$b \neq b'$ならば$r(x,b) \cup r(x,b')$は有限個の解だけ。

2. 完全な理論Tが擬空面を定義するとは

$\models s(a,b,c)$ならば$\mathrm{tp}(ab), \mathrm{tp}(bc)$が擬平面を定義する
完全タイプ$s(x,y,z)$が存在とき。

Theorem 6.3 B'を頂点が$a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, d_1, d_2$で

- $a_1a_0, a_1b_1, b_2b_1, d_1b_1 \models R'_1(x,y)$
- $a_2a_1, a_1c_1, a_2b_2, c_1c_0, c_1d_1, b_3b_2, b_2d_2, d_2d_1 \models R'_2(x,y)$

を満たす有向グラフとし、頂点a_0, a_1, a_2を除いたB'の部分構造をA'とする。このとき$T_{2,\mathcal{D}}$で以下が成立。

1. $A' \leq B', A', B' \in \mathcal{D}'$

2. $a_0 \notin \mathrm{acl}(A), a_1 \notin \mathrm{acl}(a_0A), a_2 \notin \mathrm{acl}(a_0a_1A)$

3. $\mathrm{tp}(a_0a_1a_3/A)$ は擬空間を定義する。

Proof. 1: $A' \leq' B'$ は明らか。B が R'_i のサイクルを持たず、各頂点から外向きの辺は 2 本以内はすぐわかる。$b_1a_1c_1, b_1b_2d_2$ は Nice でない (1,2)-path だが d_1 のお陰で b_1 から c_1、b_1 から d_2 の Nice (1,2)-path があり $B' \in \mathcal{D}'$ が分る。同様に A' も d_1 のお陰で $A' \in \mathcal{D}'$.
2: 1 より $A \leq B \leq \mathcal{M}$ としてよい。$e_j (j < \omega)$ を a_i の $B - a_i$ 上のコピーで $\{e_j : j < \omega\}$ は discreet(no relations) とする。このとき $B\{e_j : j < \omega\} \leq \mathcal{M}$. 従って $B = Aa_0a_1a_2e_0 \cdots e_j \cdots \leq \mathcal{M}$ で B の「e_j と a_i と交換し並べ替えた同型もの」を B' とする。$B' \leq \mathcal{M}$ より $a_i \equiv_{Aa_{<i}} e_j$ が成立し矛盾。
3: $a_ia_{i+1} \equiv_A a'_ia_{i+1}$ ならば $a_{i+1} \in \mathrm{acl}(Aa_ia'_i)$ が成立。ここで

$$B \models R_{i+1}(a_{i+1}, a_i) \wedge R_{i+1}(a_{i+1}, b_{i+1}) \wedge R_{i+1}(a_{i+1}, a'_i)$$

より a_{i+1} が $a_ia'_iA$ 上のコピーを 3 つ持った場合、各頂点が 3 本辺を持つグラフが $\mathcal{M}$ 内に存在し、Remark ?? より矛盾。
同様に

$$B \models R_{i+1}(a_i, a_{i+1}) \wedge R_{i+1}(a_i, c_i) \wedge R_{i+1}(a_i, a'_{i+1})$$

より a_{i+1} が $a_{i+1}a'_{i+1}A$ 上のコピーを 3 つ持った場合、各頂点が 3 本辺を持つグラフが $\mathcal{M}$ 内に存在し、Remark ?? に反す。 □

Question 6.4 *1.* $\mathcal{C}'$ の定め方をランクが下がるよう細工して有限ランクの *2-ample* 構造が作れるか？例えば、$\mathcal{C}$ の各 R_1, R_2 ごとに *Baldwin* のランク *2* の射影平面を作る部品になるように $\mathcal{C}'$ を与えた時、T_2 はランク有限になるか？

2. $T_{2,\mathcal{D}}$ は超安定でない事が知られている。$\mathcal{D}'$ の定め方をランクが下がるよう細工して有限ランクの擬空間を定義する *2-ample* 構造が作れるか？

参考文献

[E] D.M.Evans, Trivial stable structures with non-trivial reducts, to appear in Journal of London Mathematical Society.

[E1] D.M.Evans, Ample dividing, Journal of Symbolic Logic 68 (2003), 1385-1402.